

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор Высшей школы**  
**современной математики**  
**А.Н. Соболевский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дифференциальные уравнения
<b>по направлению:</b>	Математика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная математика
	Высшая школа современной математики
	Высшая школа современной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

4 (весенний) - Экзамен

5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 150 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 90 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Подготовка к экзамену: 60 час.

Всего часов: 360, всего зач. ед.: 10

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.Л. Бланк, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

## Аннотация

Курс «Дифференциальные уравнения» является одним из базовых математических курсов и призван познакомить студентов с широким кругом идей и методов решения и анализа дифференциальных уравнений, что имеет важнейшее значение для дисциплин физического цикла. Находясь на стыке сразу нескольких математических дисциплин, этот курс позволяет на содержательных примерах продемонстрировать работу методов математического анализа, алгебры и дифференциальной геометрии. Кроме того, изучая дифференциальные уравнения, слушатели на достаточно простом и наглядном уровне знакомятся с некоторыми важными разделами классической механики.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Изучение теории дифференциальных уравнений для дальнейшего использования в других математических дисциплинах аналитического цикла; формирование математической культуры, исследовательских навыков. в том числе для решения вычислительных задач, и способности применять знания на практике.

#### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области математического анализа;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов математического анализа с контекстом других математических дисциплин

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

Основные понятия теории дифференциальных уравнений.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.	2	4		4
2	Разделение переменных и однородные уравнения.	2	4		7
3	Линейные уравнения с периодическими коэффициентами.	2	4		7
4	Пфаффовы уравнения и уравнения в полных дифференциалах.	2	4		7
5	Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.	2	4		7
6	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	2	4		7
7	Линейные автономные системы.	2	4		7
8	Принцип сжимающих отображений.	2	4		7
9	Фазовые потоки.	2	4		7
10	Теория устойчивости.	2	4		7
11	Линейные дифференциальные операторы в частных производных.	4	8		8

12	Одномерное волновое уравнение.	2	4		7
13	Задача Штурма-Лиувилля.	2	4		7
14	Одномерное уравнение Шредингера.	2	4		7
15	Обобщенные функции.	6	6		9
16	Волновое уравнение в многомерном пространстве.	6	6		9
17	Нелинейные уравнения в частных производных.	8	8		16
18	Уравнение теплопроводности.	2	2		4
19	Уравнение Шредингера.	4	4		8
20	Интегрируемость.	4	4		8
Итого часов		60	90		150
Подготовка к экзамену		60 час.			
Общая трудоёмкость		360 час., 10 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

##### 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Векторные поля на прямой.

Обыкновенное дифференциальное уравнение.

Неравенство Гронуолла.

Теорема единственности.

Разделение переменных и однородные уравнения.

##### 2. Разделение переменных и однородные уравнения.

Разделение переменных.

Однородные уравнения.

##### 3. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами.

Линейные уравнения с периодическими коэффициентами.

Монодромия.

##### 4. Пфаффовы уравнения и уравнения в полных дифференциалах.

Пфаффовы уравнения и уравнения в полных дифференциалах.

##### 5. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

##### 6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Метод комплексных амплитуд.

Резонансы.

##### 7. Линейные автономные системы.

Линейные автономные системы.

Экспонента линейного оператора.

Особые точки линейных систем на плоскости: седло, фокус, центр.

#### 8. Принцип сжимающих отображений.

Метрические пространства.

Принцип сжимающих отображений.

Теорема существования, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных условий.

#### 9. Фазовые потоки.

Фазовые потоки и генераторы.

Уравнения в вариациях.

Искажения фазового объема.

Теоремы о гладкости и о выпрямлении.

#### 10. Теория устойчивости.

Устойчивость по Ляпунову.

Асимптотическая устойчивость.

Предельные циклы

#### 11. Линейные дифференциальные операторы в частных производных.

Линейные дифференциальные операторы в частных производных.

Эллиптический, гиперболический, параболический случай.

Характеристики.

#### 12. Одномерное волновое уравнение.

Одномерное волновое уравнение.

Представление решения в виде суммы двух волн.

#### 13. Задача Штурма-Лиувилля.

Задача Штурма-Лиувилля.

#### 14. Одномерное уравнение Шредингера.

Одномерное уравнение Шредингера.

### Семестр: 5 (Осенний)

#### 15. Обобщенные функции.

Обобщенные функции.

Свертка и преобразование Фурье.

Пространства Соболева.

Обобщенное решение задачи Дирихле.

Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа

#### 16. Волновое уравнение в многомерном пространстве.

Волновое уравнение в многомерном пространстве.

Свойства потенциалов и их вычисление.

Волновые фронты и коротковолновое приближение для гиперболических уравнений.

17. Нелинейные уравнения в частных производных.

Уравнение Гамильтона-Якоби.

Вещественное уравнение Монжа-Ампера и его геометрический смысл.

Уравнение Монжа-Ампера в комплексном случае.

18. Уравнение теплопроводности.

Уравнение теплопроводности.

Диффузионные процессы.

19. Уравнение Шредингера.

Уравнение Шредингера в одномерном случае.

Задача рассеяния.

20. Интегрируемость.

Уравнение Кортевега-де Фриза.

Метод обратной задачи рассеяния.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : [учебник для вузов] / И. Г. Петровский .— М. : Физматлит, 2009 .— 208 с.
2. Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] : учебник : доп. М-вом образования СССР / И. Г. Петровский .— М. - Л. : Гостехиздат, 1950 .— 303 с.

### **Дополнительная литература**

1. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Арнольд .— М. : Наука, 1978 .— 304 с.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2012 .— 344 с.
3. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003 .— 416 с.
4. Линейные и нелинейные волны [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Дж. Уизем ; пер. с англ. В. В. Жаринова ; под ред. А. Б. Шабата .— М. : Мир, 1977 .— 622 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Математика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

4 (весенний) - Экзамен

5 (осенний) - Экзамен

**Разработчики:**

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.Л. Бланк, д-р физ.-мат. наук



## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» обучающийся должен:

**знать:**

Основные понятия теории дифференциальных уравнений.

**уметь:**

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

**владеть:**

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Векторные поля на прямой. Обыкновенное дифференциальное уравнение. Неравенство Гронуолла. Теорема единственности
2. Разделение переменных и однородные уравнения
3. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Монодромия
4. Пфаффовы уравнения и уравнения в полных дифференциалах
5. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений
6. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод комплексных амплитуд. Резонансы
7. Линейные автономные системы. Экспонента линейного оператора. Особые точки линейных систем на плоскости: седло, фокус, центр
8. Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений. Теорема существования, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных условий
9. Фазовые потоки и генераторы. Уравнения в вариациях. Искажения фазового объема. Теоремы о гладкости и о выпрямлении
10. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Предельные циклы
11. Линейные дифференциальные операторы в частных производных. Эллиптический, гиперболический, параболический случай. Характеристики
12. Одномерное волновое уравнение
13. Задача Штурма-Лиувилля
14. Одномерное уравнение Шредингера
15. Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье
16. Пространства Соболева. Обобщенное решение задачи Дирихле
17. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа
18. Волновое уравнение в многомерном пространстве
19. Свойства потенциалов и их вычисление
20. Волновые фронты и коротковолновое приближение для гиперболических уравнений
21. Нелинейные уравнения в частных производных
22. Уравнение Гамильтона-Якоби
23. Уравнение Монжа-Ампера
24. Уравнение теплопроводности
25. Уравнение Шредингера
26. Уравнение Кортевега-де Фриза
27. Метод обратной задачи рассеяния

Пример экзаменационного билета, семестр 4:

- 1) ОДУ с разделяющимися переменными.
- 2) Устойчивость по Ляпунову.

Пример экзаменационного билета, семестр 5:

- 1) Преобразование Фурье и его применение для построения решений УрЧП.
- 2) Уравнение Монжа-Ампера.

## Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.